Concursul interjudeţean de matematică al Revistei SINUS
Ediţia a VIII-a, Suceava, 1 iunie 2013

CLASA a XII-a

1. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-4X^3+6X^2+aX+b$, care are rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4.

a) Să se determine a şi b ştiind că f are rădăcina i.

b) Să se calculeze $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$.

c) Să se se determine valorile reale ale numerelor a şi b ştiind că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

2. Să se calculeze $\int x\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}dx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică egalitatea $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

a) Există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(t)=a\cos t+b\sin t,\forall t\in\mathbb{R}$.

b) Are loc inegalitatea $\int_0^{\pi/2}e^{f(t)}dt\geq\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2 ore.